Moto dei fluidi in pressione

Concentriamoci a questo punto sul moto dei fluidi in condotti a sezione costante. Ipotizziamo regimi permanenti di massa, termodinamico e cinematico. La velocità e le altre grandezze termodinamiche di stato sono uniformi su ciascuna sezione.
Vale la conservazione della massa:

$$\dot{m} = cost \Rightarrow d\dot{m} = 0 \Leftrightarrow d(\rho w A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho w dA + \rho A dw + A w d\rho = 0$$

Dividiamo per $\rho w A$:

$$\frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Per fluido incomprimibile $\frac{d\rho}{\rho} = 0$ quindi:

$$\frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} = 0$$

È l'equazione di continuità per fluidi incomprimibili in correnti in pressione.
Passiamo alla conservazione dell'energia:

$$dQ - dL_e = dH + \frac{dw^2}{2} + g\,dz$$

Abbiamo $dH = TdS + v\,dp$ e $TdS = dQ + TdS_s$. Perciò sostituiamo $dH = dQ + TdS_s + v\,dp$:

$$\cancel{dQ} - dL_e = \cancel{dQ} + TdS_s + v\,dp + d\frac{w^2}{2} + g\,dz$$

$$\Rightarrow dL_e + TdS_s + v\,dp + \frac{dw^2}{2} + g\,dz = 0$$

In cui $TdS_s = L_a$, lavoro d'attrito fatto dalle forze viscose (perdite di I specie):

$$dL_e + dL_a + v\,dp + \frac{dw^2}{2} + g\,dz = 0$$

Per i fluidi $L = v\Delta p = v g \rho h = gh$. Allora $dL_e = g\,dh_e$ e $dL_a = g\,dh_a$:

$$g\,dh_e + g\,dh_a + v\,dp + d\frac{w^2}{2} + g\,dz = 0$$

$$\Rightarrow dh_e + dh_a + \frac{v\,dp}{g} + d\frac{w^2}{2g} + dz = 0$$

$$\Rightarrow dh_e + dh_a + \frac{dp}{\rho g} + d\frac{w^2}{2g} + dz = 0$$

Abbiamo scoperto l'equazione di Bernoulli, che esprime sotto forma di carichi la conservazione dell'energia. I carichi sono lavoro per unità di peso. Abbiamo affrontato il caso monodimensionale

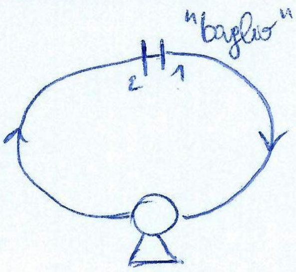
Tra sezione di ingresso e sezione di uscita (1 e 2):

$$h_{e_{1,2}} + h_{a_{1,2}} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + z_2 - z_1 = 0$$

In cui:

- $h_{e_{1,2}}$: carico motore (pompa);
- $h_{a_{1,2}}$: carico d'attrito;
- $\int_1^2 \frac{dp}{\rho g}$: carico piezometrico;
- $\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}$: carico cinetico;
- $z_2 - z_1$: carico geodetico (quote baricentriche delle sezioni 1 e 2).

Con un circuito continuo:



$$h_{e_{1,2}} + h_{a_{1,2}} + \int_1^2 \frac{dp}{g\rho} + \underbrace{\cancel{\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{(z_2 - z_1)}}_{=0} = 0$$

Per fluido incomprimibile $\rho = cost \Rightarrow \int_1^2 \frac{dp}{g\rho} = 0$.
Quindi:

$$h_{e_{1,2}} = -h_{a_{1,2}}$$

Allora dato che $dL_a = TdS_i = g\,dh_a > 0 \Rightarrow dL_e = g\,dh_e < 0$
La potenza meccanica della pompa è:

$$P_e = \dot{m}\, L_e = \dot{m} g\, h_{e_{1,2}}$$

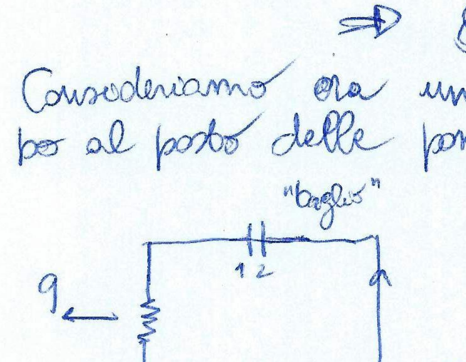
Tutto il lavoro fornito diventa calore, come si deduce dal seguente bilancio energetico:

$$dQ - dL_e = dH + \frac{dw^2}{2g} + g\,dz$$

$$\Rightarrow Q_{1,2} - L_{e_{1,2}} = \underbrace{\cancel{(H_2 - H_1)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{w_2^2 - w_1^2}{2}}}_{=0} + \underbrace{g\cancel{(z_2 - z_1)}}_{=0}$$

$$\Rightarrow Q_{1,2} = L_{e_{1,2}}$$

Consideriamo ora un circuito con due scambiatori (usato un tempo al posto della pompa):



$$\underbrace{\cancel{h_{e_{1,2}}}}_{=0} + h_{a_{1,2}} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho g} + \underbrace{\cancel{\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{(z_2 - z_1)}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow h_{a_{1,2}} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho g} = 0$$

Se $\rho = cost$ nulla accade. Se invece $\rho = \rho(T)$ il fluido gira nel circuito.

È il sistema termosifone.

Le perdite di carico e il problema del camino

Richiamiamo l'equazione di Bernoulli:

$$dh_e + dh_a + \frac{dp}{\rho g} + \frac{dw^2}{2g} + dz = 0$$

$$\Rightarrow h_{e_{1,2}} + h_{a_{1,2}} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) = 0$$

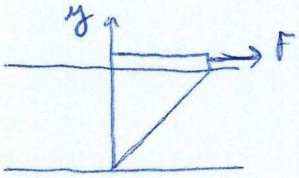
Le perdite di carico sono di due tipi:

$$h_a = h_a' + h_a'' \quad \begin{cases} h_a': \text{perdite di carico distribuite} \\ h_a'': \text{perdite di carico concentrate} \end{cases}$$

Le perdite di carico sono responsabili di una caduta di pressione tra due sezioni di un condotto. In particolare quelle distribuite:

$$p_1 - p_2 = g \rho h_a'$$

Le perdite di carico distribuite dipendono dalla viscosità del fluido. Inoltre:



$$F = \mu \cdot S \cdot \frac{dw}{dy}$$

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\rho g h_a'}{L} = f(\mu, \rho, w, D_H)$$

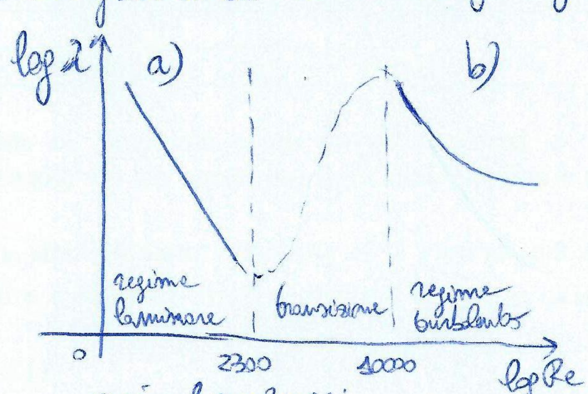
$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{L} = \mu^m \cdot \rho^n \cdot w^k \cdot D_H^q$$

Col teorema pigreco:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\rho g}{D_H} \cdot \frac{w^2}{2g} \cdot f(Re) \Rightarrow h_a' = \frac{L}{D_H} \cdot \frac{w^2}{2g} \cdot f(Re) = \frac{L}{D_H} \cdot \frac{w^2}{2g} \cdot \lambda$$

Con λ fattore d'attrito dipendente dal numero di Reynolds $Re = \frac{w D_H \rho}{\mu} = \frac{w D_H}{\nu}$

Il diagramma di Moody lega λ a Re:



a) Equazione di Poiseuille:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

b.1) Equazione di Blasius per tubi lisci:

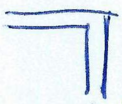
$$\lambda = \frac{0{,}316}{Re^{1/4}}$$

b.2) Equazione di Colebrook per tubi rugosi:

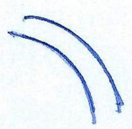
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon_r}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

Con $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D_H}$ scabrezza relativa (e ε scabrezza). Verso destra, per Re molto grandi, si ha indipendenza da λ.

Le perdite concentrate sono dovute a cambiamenti di forma del condotto:

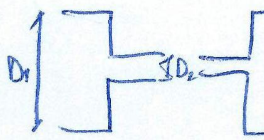


gomiti



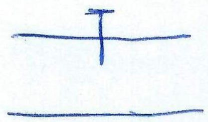
curve pronunciate

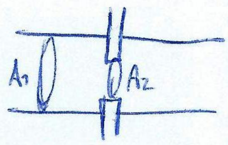
$\lambda' = f(D_H, r)$



restringimenti e allargamenti

$\lambda' = f(D_H, D_1/D_2)$





valvole

$\lambda' = f(D_H, A_1/A_2)$

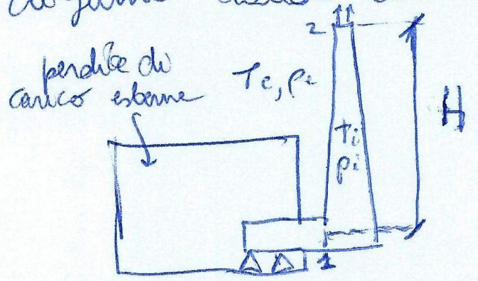
Se $\lambda' = 1$ le perdite di carico coincide con un carico cinetico $\frac{U^2}{2g}\cdot\frac{L}{D_H}$

D_H è il diametro idraulico.

Bisogna fornire molta energia per superare le perdite di carico:

$$P_e = \dot m L_e \Rightarrow P_e = \dot m g h_e$$

Un'applicazione è quella del problema del camino, cioè dell'estrazione di fumi dalla camera di combustione (aria trattata come gas perfetto):



$$dh_e + dh_a + \frac{dw^2}{2g} + \frac{dp}{\rho g} + dz = 0$$

$$\Rightarrow h_{e1,2} + h_{a1,2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + z_2 - z_1 = 0$$

Con $(z_2 - z_1) = H$. Se $T_i = cost \Rightarrow \rho_i = cost$.

Da $\dot m = \rho_i V_2 = \rho_i w_2 A_2$ si ricava w_2.

Se $A_1 >> A_2 \Rightarrow w_2 >> w_1 \Rightarrow w_1 \simeq 0$

Infine $p_2 - p_1 = \cancel{p_a - p_a} - g\rho_e H = -g\rho_e H$. Quindi si ottiene:

$$h_{e1,2} + h_{a1,2} + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{\cancel{g}\rho_e H}{\cancel{g}\rho_i} + H = 0 \Rightarrow h_{e1,2} + h_{a1,2} + \frac{W_2^2}{2g} + H\left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_i}\right) = 0$$

Supponiamo $A = A_2 = cost$, $A \neq A_1$:

$$h_{a1,2} = h'_{a1,2} + h''_{a1,2} = \lambda\frac{H}{D}\cdot\frac{w_2^2}{2g} + \lambda'\frac{w_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{w_2^2}{2g}\left(\lambda\frac{H}{D} + \lambda' + 1\right) - H\left(\frac{\rho_e - \rho_i}{\rho_i}\right) + h_{e1,2} = 0$$

Si ha tiraggio naturale se non c'è ventola, $h_{e1,2} = 0$, tiraggio forzato se $h_{e1,2} \neq 0$:

NATURALE

$$H\cdot\frac{(\rho_e - \rho_i)}{\rho_i} = \frac{w_2^2}{2g}\left(\lambda\frac{H}{D} + \lambda' + 1\right) + \varepsilon$$

Con ε perché l'aria deve vincere le perdite di carico esterne

FORZATO

$$-h_{e1,2} = \frac{W_2^2}{2g}\left(\lambda\frac{H}{D} + \lambda'\right) + \frac{w_2^2}{2g}$$

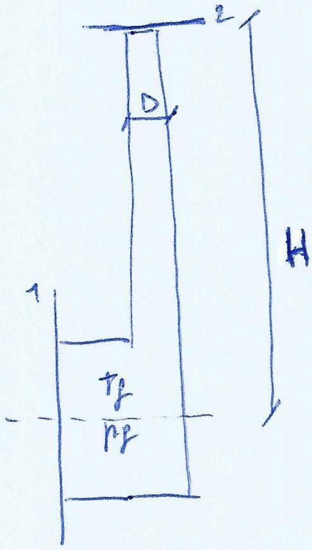
Supponendo nullo il termine di galleggiamento

Tuttavia T non è uniforme su tutto il camino: piano piano (salendo verso l'alto) si abbassa. Si suddivide allora il camino in tratti da 20-30 cm e si prende una T per ciascun tratto. Più il camino è alto meno è necessario spendere energia per il tiraggio. Talvolta si sfruttano contemporaneamente quello naturale e quello forzato. La potenza della ventola è:

$$P_e = g\cdot\rho_i\cdot h_{e1,2}$$

La velocità dei fumi del camino

Il problema di verifica del camino, mirato a calcolare la velocità di flusso dei fumi, conduce alla necessità di iterazione dell'equazione risolutiva:



T_e, p_e $\qquad D_c = d \qquad h_c = H$

$$h_e + h_a + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + (z_2 - z_1) = 0$$

Ipotesi:

- $A_1 >> A_2 \Rightarrow w_1 << w_2 \Rightarrow w_1 \simeq 0$
- $\rho_1 w_1 A_1 = \rho_2 w_2 A_2$, $\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow A_1 w_1 = A_2 w_2$
- $p_e = p_{atm} = p_2$, $p_1 = p_{atm} + g \rho_e H$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{h_e}}_{=0} + h_a + \frac{w_2^2}{2g} + \frac{\cancel{p_{atm} - p_{atm}} - g \rho_e H}{g \rho_f} + H = 0$$

$$\Rightarrow h_a + \frac{w_2^2}{2g} + H\left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_f}\right) = 0$$

In cui $h_a = h_a' + h_a'' = \lambda \frac{H}{D} \cdot \frac{w_2^2}{2g} + \lambda' \frac{w_2^2}{2g} = \frac{w_2^2}{2g}\left(\lambda' + \lambda \frac{H}{D}\right)$:

Sostituendo nell'equazione di Bernoulli:

$$\frac{w_2^2}{2g}\left(\lambda' + \lambda \frac{H}{D}\right) + \frac{w_2^2}{2g} + H\left(\frac{\rho_f - \rho_e}{\rho_f}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{w_2^2}{2g}\left(\lambda' + \lambda \cdot \frac{H}{D} + 1\right) = H \cdot \frac{\rho_e - \rho_f}{\rho_f}$$

$$\Rightarrow w_2 = \sqrt{\frac{2 g H (\rho_e - \rho_f)}{(\lambda' + \lambda H/D + 1)\rho_f}}$$

Non abbiamo né w_2 né λ e per determinare λ serve w_2 $\left(Re = \frac{w_2 \cdot D}{\nu}\right)$. Supponiamo allora che w_2 abbia un certo valore e si trova λ. Si ricava dall'equazione w_2' e si vede se la differenza tra w_2 e w_2' è inferiore al 2%. Se sì il processo è finito, altrimenti si prende una $w_2'' = \frac{w_2' + w_2}{2}$ e si procede con un nuovo λ'